



第六章 拉普拉斯变换

6.0 引言

回顾：如何引入傅里叶变换——

- 很多信号可以用周期复指数信号的线性组合来表示；
- 复指数信号是LTI系统的特征函数。

复指数信号： e^{st} , $s = j\omega$ 时——傅里叶变换

推广为任意 s 值——拉普拉斯变换

- 拉氏变换优点：除具有傅氏变换的优点外，还能应用于不稳定系统的分析；
- 拉氏变换缺点：物理意义不如傅里叶变换清晰。

$$s = \sigma + j\omega$$

6.1 拉普拉斯变换

6.1.1 定义

➤ LTI系统对 e^{st} 的响应为: $y(t) = H(s)e^{st}$

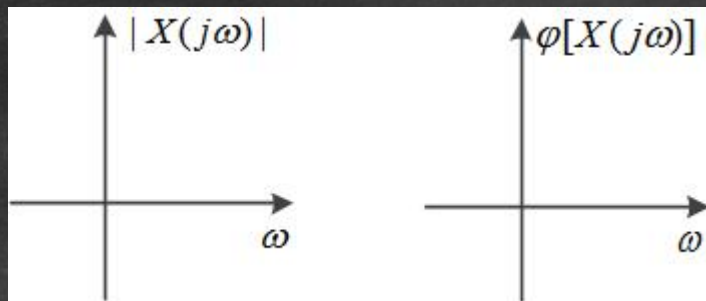
其中 $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$

➤ 对任意信号 $x(t)$, 拉普拉斯变换(L)定义为:

$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$$

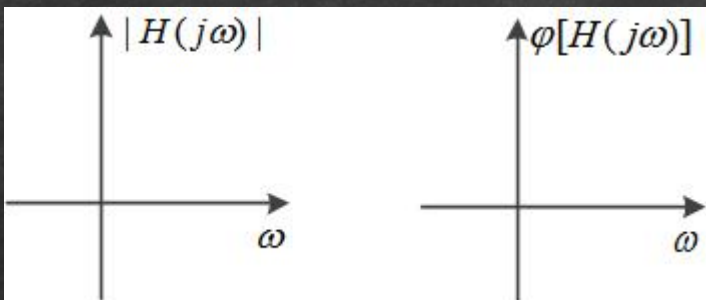
自变量 s 为复数: $s = \sigma + j\omega$

傅里叶变换



(a) 幅频特性 (b) 相频特性

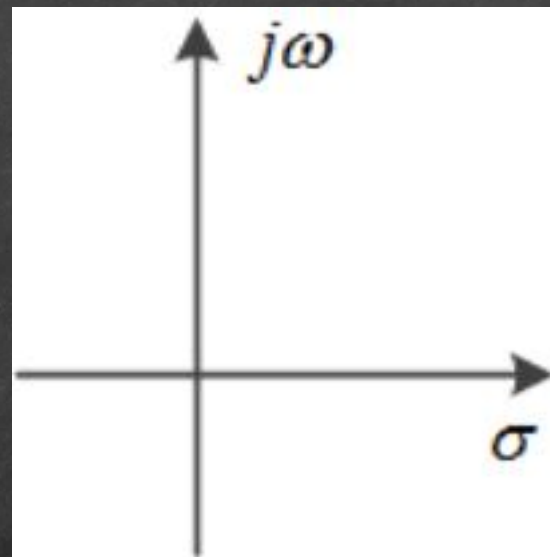
图1 信号组成



(a) 增益 (b) 相移

图2 系统对不同信号的作用

拉普拉斯变换



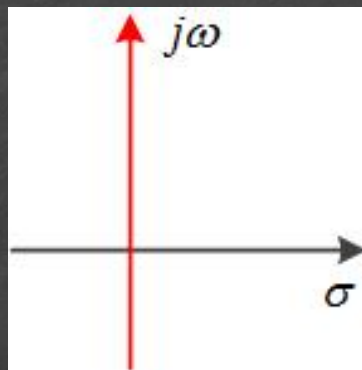
S平面

拉氏变换和傅氏变换的关系:

➤ 当 s 实部为0, 为傅里叶变换

$$L \{ x(t) \} \big|_{s=j\omega} = F \{ x(t) \}$$

$$X(s) \big|_{s=j\omega} = X(j\omega)$$



➤ 另有: $X(s = \sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$

$$\text{即 } F \{ x(t) \underline{e^{-\sigma t}} \} = L \{ x(t) \}$$

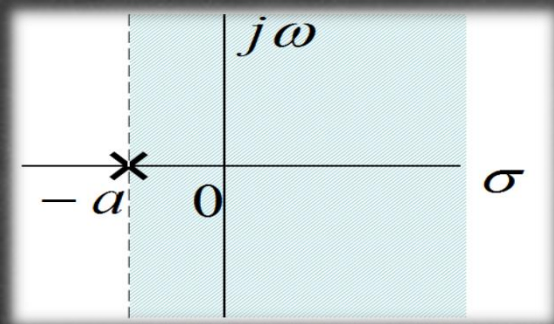
例1 $x(t) = e^{-at}u(t)$, a 为实数, 求其傅里叶变换和拉氏变换。

$$X(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{a+j\omega}, \quad a > 0$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a+\sigma)t} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} dt \quad > 0$$

$$= -\frac{1}{a+\sigma+j\omega} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} \bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{(a+\sigma)+j\omega}, \quad a+\sigma > 0$$

$\text{Re}\{s\} > -a$ ——拉普拉斯变换的收敛域
(自变量的取值范围)



只有 $a > 0$ 时, 才能令 $\sigma = \text{Re}\{s\} = 0$
而求得 $X(j\omega)$

小 结

➤ 拉普拉斯变换：能应用于不稳定系统的分析

➤ 拉普拉斯变换定义式：
$$L\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

➤ LTI系统对 e^{st} 的响应： $y(t) = H(s)e^{st}$

➤ 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系

$$X(s) \big|_{s=j\omega} = X(j\omega) \quad F\{x(t)e^{-\sigma t}\} = L\{x(t)\}$$

➤ 收敛域（只有在包含jw轴时，才可求对应傅里叶变换）

例2 $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, 求拉氏变换

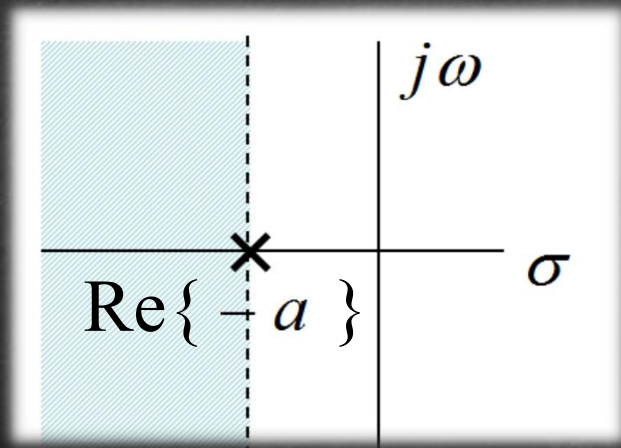
解:
$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^0 e^{-at}e^{-st}dt$$
$$= -\int_{-\infty}^0 e^{-(a+\sigma+j\omega)t}dt = \frac{1}{a+\sigma+j\omega} e^{-(a+\sigma+j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0$$
$$= \frac{1}{a+\sigma+j\omega} \quad \text{Re}\{s\} + \text{Re}\{a\} < 0$$
$$= \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{-a\}$$

例2 $x(t) = -e^{-at}u(-t)$, 求拉氏变换

解: $-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{-a\}$

例1

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$



可见, 不同的 $x(t)$ 可能有相同的 $X(s)$ 关键在于收敛域不同。

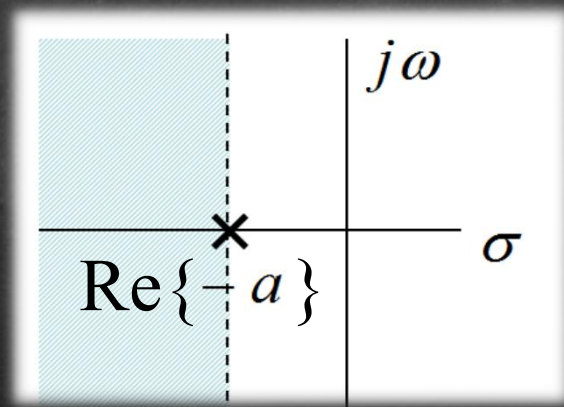
➤ 注意：求拉氏变换，必须同时给出收敛域。

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \Rightarrow \begin{cases} X(s) \text{ 数学表达式} \\ \text{ROC} \end{cases}$$

➤ 收敛域（简称ROC）：使拉普拉斯变换收敛的 S 值的范围。

ROC的图示——

复平面（S平面）



例3 $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t)$

求拉氏变换

解:

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + \left[\frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t} \right]u(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{e^{-at}u(t)} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma+jw)t} dt$$

$$= -\frac{1}{a+\sigma+jw} e^{-(a+\sigma+jw)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+s} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s + (1 + 3j)} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1-3j)} + \frac{1}{2} \frac{1}{s+(1+3j)}$$

线性性质

$$= \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}$$

ROC取交集

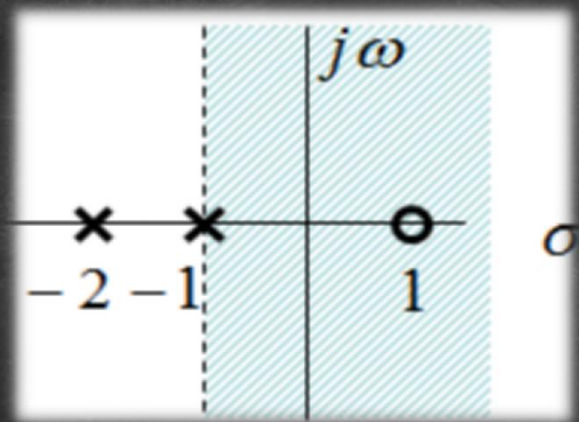
$$\begin{aligned} \text{Re}\{s\} > -2 \quad \text{Re}\{s\} > -1 \\ \text{Re}\{s\} > -1 \end{aligned}$$

$$\text{Re}\{s\} > -1$$

6.1.2 零极点图

- 上述各 $X(s)$ 称为有理的; $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$
- 只要 $x(t)$ 是实指数或复指数的线性组合, $X(s)$ 就一定是有理的。
$$= \frac{A(s-n_1)(s-n_2)\dots}{(s-d_1)(s-d_2)\dots}$$
- 对有理拉普拉斯变换, 可用 **零极点图** 来形象地表示
分子多项式的根——零点 (“o”)
分母多项式的根——极点 (“x”)

6.1.2 零极点图



$$X(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s+2)}$$
$$= \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \text{Re}\{s\} > -1$$

- 除常数因子外，零极点图+ROC就是有理拉普拉斯变换的完全表示；
- 若分母的阶次高于分子的阶次k次，则 $X(s)$ 在无限远处有k阶零点；
- 若分子的阶次高于分母的阶次k次，则 $X(s)$ 在无限远处有k阶极点。

例4 $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$

求拉氏变换

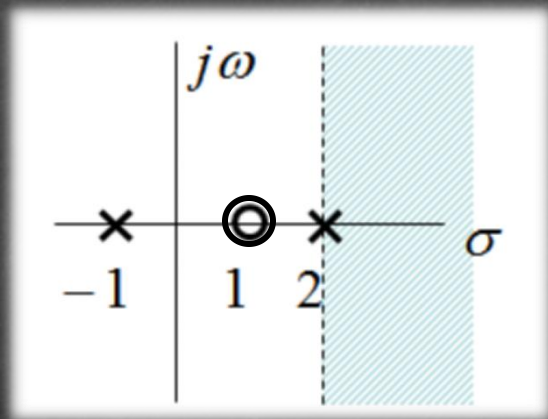
解： $L\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1$ s 为任意值

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-2} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s-2)} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > 2$$

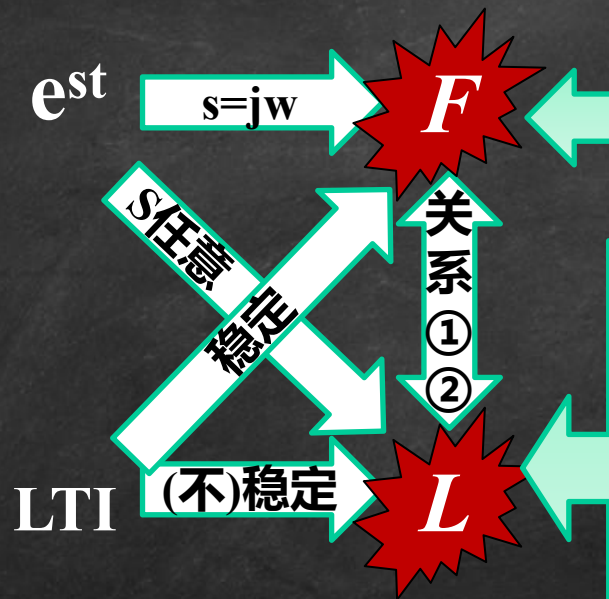


因为ROC不包含 $j\omega$ 轴 (即 $\operatorname{Re}\{s\} = 0$ 处) ,
所以无傅里叶变换。

(返回上一页, 观察时域)

总结

源于：对LTI系统 $y(t) = H(s)e^{st}$



- 优：简单方便的分析工具（输出=特征值×特征函数）
- 缺：不能分析不稳定系统

- 优：稳定+不稳定+ F
- 缺： s 复数，物理意义不明确
- 定义： $X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$
- 求解： $X(s)$ +ROC
- 零极点图

6.2拉普拉斯变换的收敛域

- 极点和ROC的关系;
- 极点、ROC与信号时域性质的关系。

$$L\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

巧合?

$$L\{-e^{-at}u(-t)\} = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} < \text{Re}\{-a\}$$

性质1: $X(s)$ 的ROC在S平面内由平行于 $j\omega$ 轴的带状区域组成。

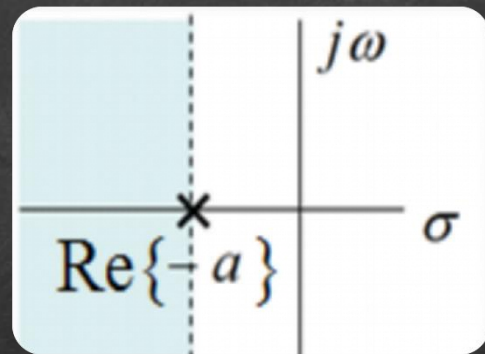
广义的

推导: $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$

利用狄里赫利第一个条件,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$



性质1: $X(s)$ 的ROC在S平面内由平行于 $j\omega$ 轴的 带状区域 组成。

- 由狄里赫利条件（绝对可积 + 2.3条件），要求
$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty,$$
 仅与 s 的实部 σ 有关
- 有物理意义的常用信号/系统都满足条件2.3, 所以绝对可积等同于傅里叶变换收敛。

性质2：对(有理)拉普拉斯变换，ROC内不包含极点。
(极点处 $X(s)$ 无穷大，不收敛)

性质3：如果 $x(t)$ 是有限持续期，且绝对可积，那么ROC为整个S平面。

$x(t)$ 有限持续期, 绝对可积 $\longrightarrow$ ROC 为整个 s 平面。

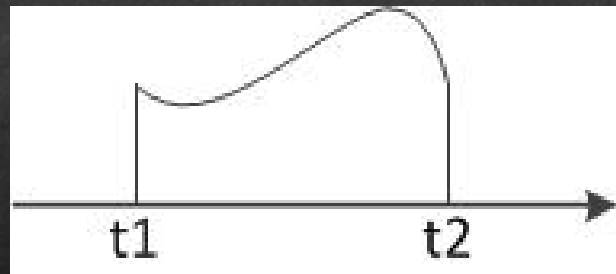
证明: 拉氏变换收敛 $\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

$\because x(t)$ 绝对可积, $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$

欲证对所有 s , 有 $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

其中 $\sigma = \operatorname{Re}\{s\}$

下面分情况讨论



目的：证对所有 s , $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

当 $\sigma = 0$ 时, 上式化为 $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt < \infty$

$\therefore \sigma = 0$ 在ROC内

当 $\sigma > 0$ 时, 有 $e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma t_1} \quad (t \in [t_1, t_2])$

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t_1} dt < \infty$$

目的：证对所有 s , $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

当 $\sigma < 0$ 时, 有 $e^{-\sigma t} \leq e^{-\sigma t_2}$ ($t \in [t_1, t_2]$)

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt \leq \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t_2} dt < \infty$$

因此对所有 s , $\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$ 成立

即ROC为整个 s 平面

例：

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{\underline{s+a}} \left[\underline{1 - e^{-(s+a)T}} \right]$$

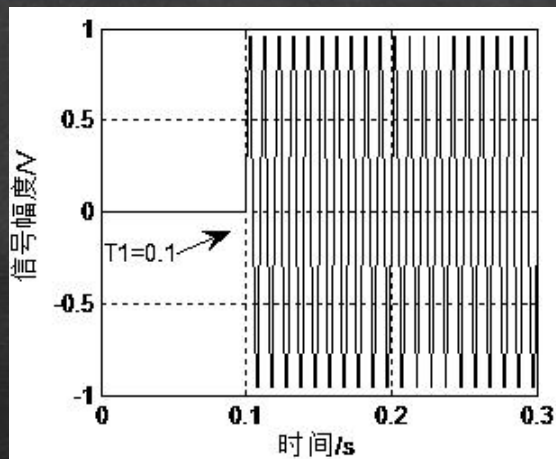
? 

ROC为整个S平面

性质4: 如果 $x(t)$ 是右边信号, 且如果 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 位于ROC内, 那么 $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ 的全部S值都一定在ROC内。

右边信号:

指 $t < T_1$ 时, $x(t) = 0$



证明: **拉氏变换收敛** $\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

$\because x(t)$ 的拉氏变换对 σ_0 收敛 $\therefore \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$

$\because x(t)$ 是右边信号 $\therefore \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$

对于 $\forall \sigma_1 > \sigma_0$, 有

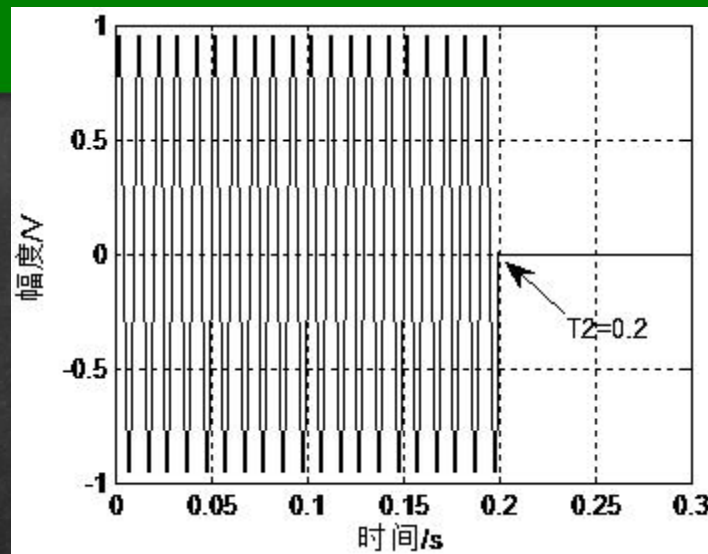
$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt$$

$$\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad \text{得证}$$

性质5: 如果 $x(t)$ 是左边信号, 且如果 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 位于ROC内, 那么 $\text{Re}\{s\} < \sigma_0$ 的全部 s 值都一定在ROC内。

左边信号:

指 $t > T_2$ 时, $x(t) = 0$,
对于左边平面的ROC。



证明: **拉氏变换收敛** $\longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$

$$\because x(t) \text{ 的拉氏变换对 } \sigma_0 \text{ 收敛} \therefore \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

$$\because x(t) \text{ 是左边信号} \therefore \int_{-\infty}^{T_2} |x(t) e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

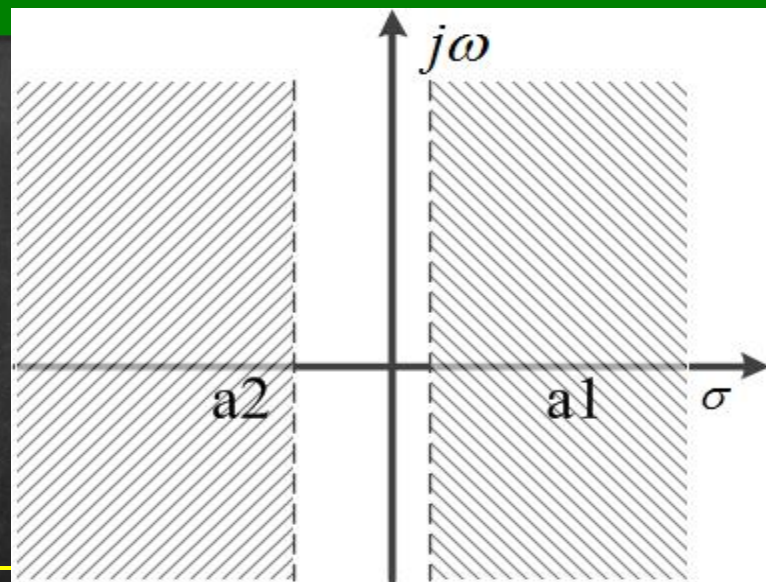
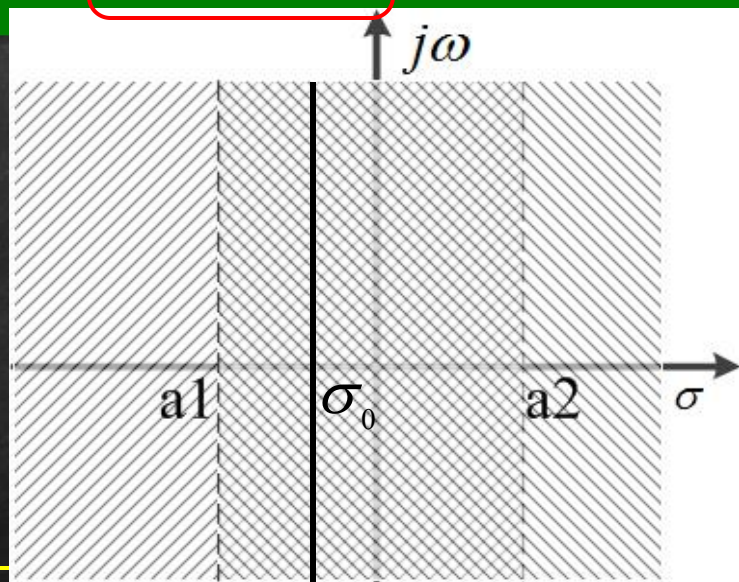
对于 $\forall \sigma_1 < \sigma_0$, 有

$$\int_{-\infty}^{T_2} |x(t) e^{-\sigma_1 t}| dt < \int_{-\infty}^{T_2} |x(t) e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t}| dt$$

$$\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_2} \int_{-\infty}^{T_2} |x(t) e^{-\sigma_0 t}| dt < \infty$$

得证

性质6: 如果 $x(t)$ 是双边信号, 且如果 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 位于ROC内, 那么ROC一定是S平面上包括 $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ 的一条带状区域。



例 $x(t) = e^{-b|t|}$, b 为实数, 求拉氏变换

解: $x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$

$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+b} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -b$$

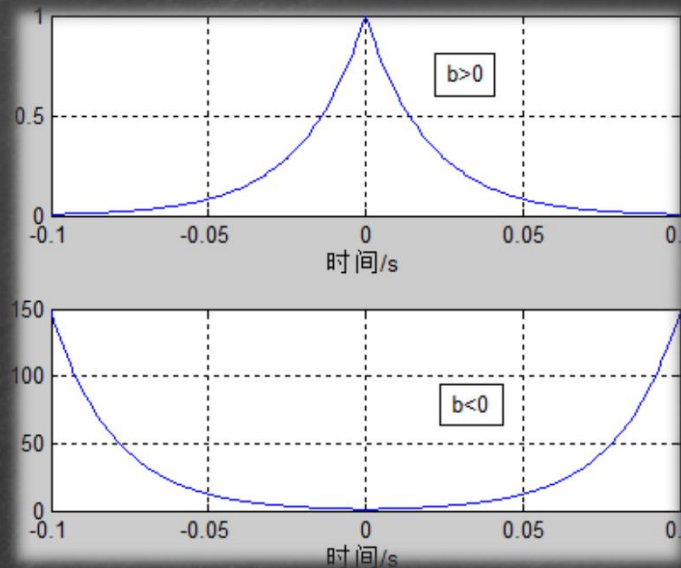
$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{-1}{s-b} \quad \operatorname{Re}\{s\} < b$$

假如 $b > 0$ $e^{-b|t|} \xleftrightarrow{L} \frac{-2b}{s^2 - b^2}$

$$-b < \operatorname{Re}\{s\} < b$$

假如 $b \leq 0$ 上述 ROC 无公共部分，
表明 $X(s)$ 不存在。

※如果信号 $x(t)$ 的拉式变换存在，一定属于性质
3~6中的一种。



注意： $b=0$ 时, $e^{-b|t|} = 1$ 常数不存在拉氏变换。

$$1 = u(t) + u(-t)$$

$$u(t) \xleftrightarrow{L} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \frac{1}{-s} e^{-(\sigma+j\omega)t} \bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad \underline{\text{Re}\{s\} > 0}$$

$$u(-t) \xleftrightarrow{L} \int_{-\infty}^0 e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \frac{1}{-s} e^{-(\sigma+j\omega)t} \bigg|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{s} \quad \underline{\text{Re}\{s\} < 0}$$

- 常数信号没有拉氏变换
- 周期信号没有拉氏变换

$\delta(s)$ 不存在 $\delta(j\omega)$ 存在

周期信号的傅里叶变换的学习中允许引入的，
突破了狄里赫利第一个条件。

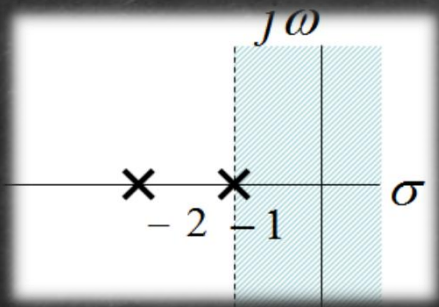
性质7: 如果 $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 是有理的, 那么它的ROC是被极点所界定的或延伸到无限远。且ROC内不包含 $X(s)$ 的任何极点。

性质8: 若 $x(t)$ 的拉氏变换 $X(s)$ 是有理的, 对右边信号, 则其ROC位于最右边极点的右边; 对左边信号, 则其ROC位于最左边极点的左边;

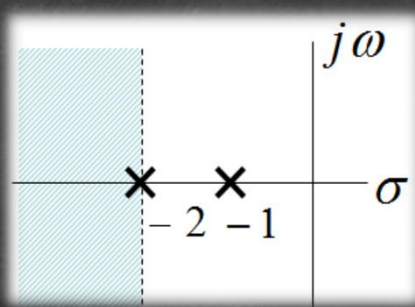
例:
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

判断 $x(t)$ 时域形式

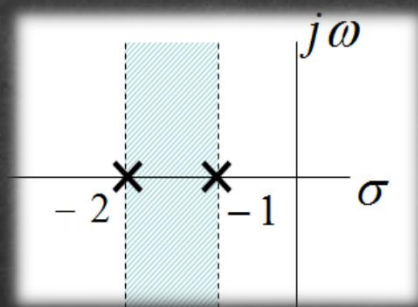
$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$



右边信号



左边信号



双边信号

小结

- ROC平行于 $j\omega$ 轴的带状区域且不包含任何极点
 - 有限持续期&绝对可积→ROC整个S平面
 - 右边信号→ROC右边
 - 左边信号→ROC左边
 - 双边信号→ROC带状
- $X(s)$ 有理
- 被极点界定
- 最右边极点的右边
- 最左边极点的左边

6.3 拉普拉斯反变换

定义式:
$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

对于一般的 $X(s)$, 上述积分的求值要利用复平面的围线积分 —— 不做讨论。

➤ 重点掌握:

有理变换, 利用部分分式展开法。

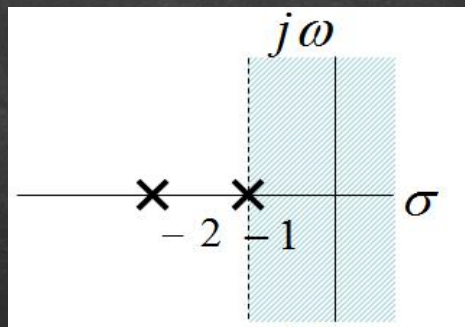
例 $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, 求拉普拉斯反变换

解：展开为 $X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

a. 对右半平面的ROC

$$x(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)$$

存在傅立叶变换



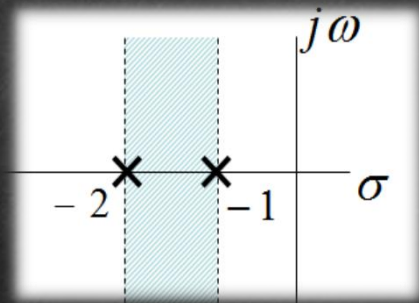
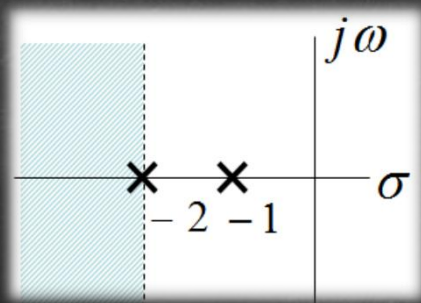
b. 对左半平面的ROC

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(-t)$$

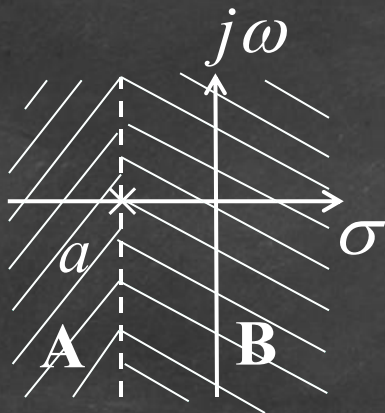
无傅立叶变换

c. 对带状的ROC

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$



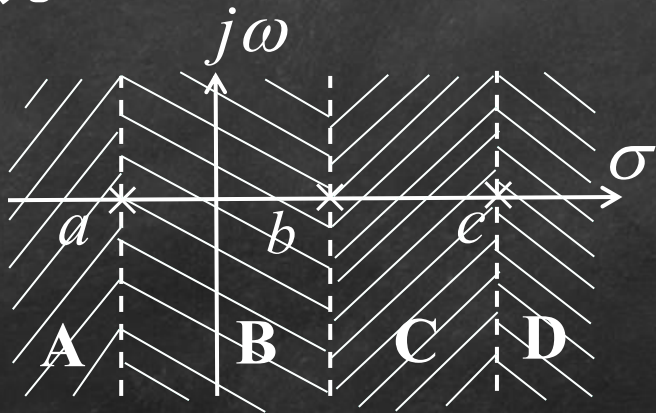
一个极点情况:



A: $\text{Re}\{s\} < a$

B: $\text{Re}\{s\} > a$

三个极点情况:



A: $\text{Re}\{s\} < a$

B: $a < \text{Re}\{s\} < b$

C: $b < \text{Re}\{s\} < c$

D: $\text{Re}\{s\} > c$

反变换整理:

1、有理型真分式，直接部分分式展开；

注意共轭极点的处理；

$$[\sin \omega_0 t]u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$[\cos \omega_0 t]u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$$

$$[e^{-at} \sin \omega_0 t]u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

$$[e^{-at} \cos \omega_0 t]u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

例：求下述函数的逆变换式 $X(s) = \frac{s^2 + 3}{(s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$

解： $X(s) = \frac{A}{s + 2} + \frac{Bs + C}{(s + 1)^2 + 2^2}$

$$A = (s + 2)X(s) \big|_{s=-2} = \frac{(-2)^2 + 3}{(-2)^2 + 2(-2) + 5} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{s^2 + 3}{(s + 2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{(\frac{7}{5} + B)s^2 + (\frac{14}{5} + 2B + C)s + (7 + 2C)}{(s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$B = -2/5 \quad C = -2 \quad X(s) = \frac{7/5}{s+2} - \frac{2/5s+2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$X(s) = \frac{7/5}{s+2} - \frac{2/5 \times (s+1)}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{4/5 \times 2}{(s+1)^2 + 2^2}$$

$$x(t) = \left[\frac{7}{5} e^{-2t} - \frac{2}{5} e^{-t} \cos(2t) - \frac{4}{5} e^{-t} \sin(2t) \right] u(t)$$

反变换整理:

1、有理型真分式，直接部分分式展开；

注意共轭极点的处理；

2、有理型分子阶次 $\geq$ 分母，化为整式+真分式，同1；

3、非有理型——分母变化，对应单边周期型；

4、非有理型——性质的应用。

6.6节

6.4 拉普拉斯变换的性质

1、线性 $x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)$ ROC为 R_1
 $x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)$ ROC为 R_2

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s) \quad \text{ROC包括 } R_1 \cap R_2$$

(1) 若交集为空, 则 $X(s)$ 无收敛域, $x(t)$ 不存在拉氏变换。(如前节例 $b \leq 0$ 时)

(2) $X(s)$ 的ROC可能比 $R_1 \cap R_2$ 大? YES!

例：已知 $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad \underline{\text{Re}\{s\} > -1}$$

交集 $\text{Re}\{s\} > -1$

求 $X(s)$

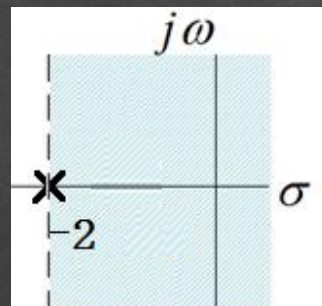
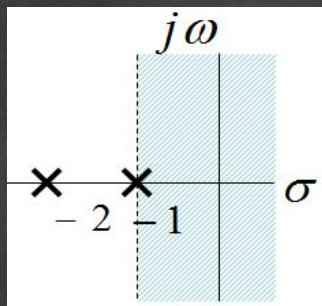
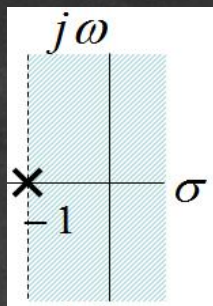
$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad \underline{\text{Re}\{s\} > -1}$$

解： $X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)(s+2)}$

$$= \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

ROC为： $\underline{\text{Re}\{s\} > -2}$

收敛域扩大了！



$R_1 \cap R_2$ 为: $\text{Re}\{s\} > -1$, 但仅在 $s = -2$ 有极点,
所以 ROC 向左延伸至 $s = -2$

原因: $s = -1$ 处零、极点抵消

确定 $ax_1(t) + bx_2(t)$ 的ROC方法:

Step (1) 求 $R_1 \cap R_2$;

Step (2) 将其向左、或右延伸，直至最近的极点。

※注意：线性性质若发生了零极点抵消，则ROC可能比交集要大。

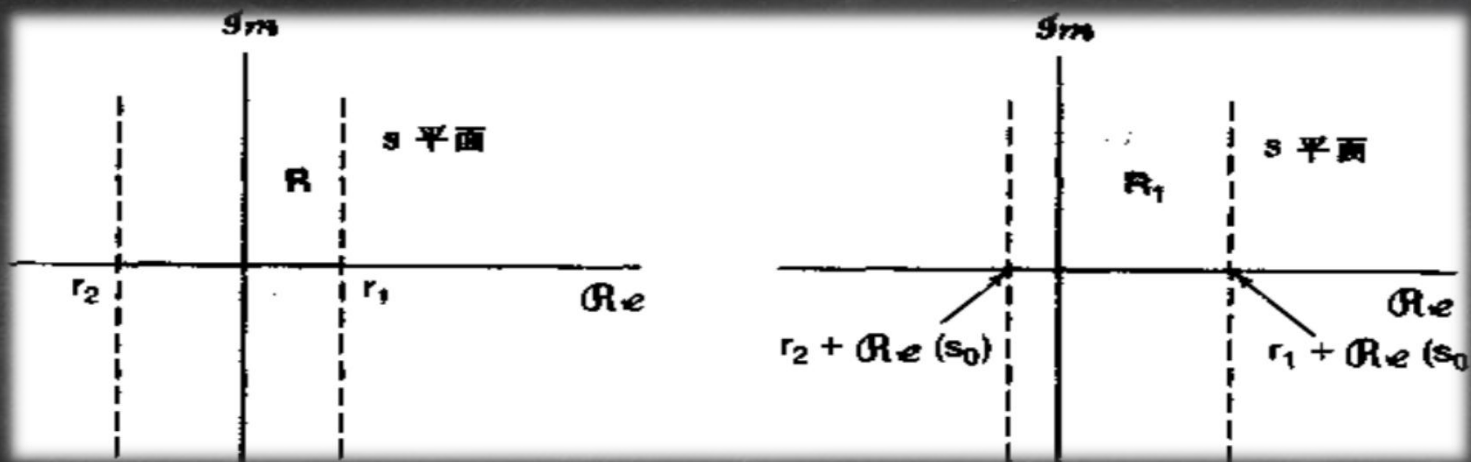
若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ ROC为 R

2、时移 $x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} \underline{e^{-st_0}} X(s)$ ROC为 R

3、S域平移 $e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0)$

ROC为 $R + \text{Re}\{s_0\}$

ROC如上表示是一种边界变化



若 $X(s)$ 有极点或零点在 $S = a$, 那么 $X(s - s_0)$

一定有极点或零点在 $s - s_0 = a$, 即 $s = s_0 + a$

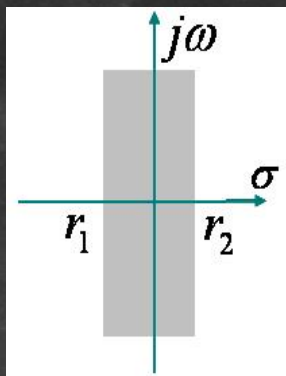
思考: 若 $S_0 = j\omega_0$, ROC 如何变化?

4、时域尺度变换 (a为实)

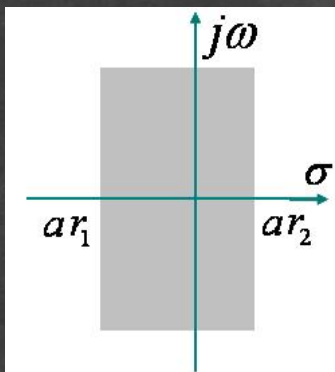
若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ ROC为 R

则 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ ROC为 $s/a \in R$

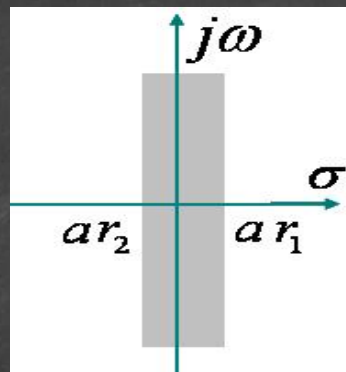
ROC = aR 表示 “边界的变化”



$X(s)$ 的收敛域



$a > 0$
 $(|a| > 1)$



$a < 0$
 $(|a| < 1)$

※注意： $a < 0$ 时，ROC要增加关于 $j\omega$ 轴的反转。

例： $x(-t) \leftrightarrow X(-s)$ ROC为 $-R$

5、共轭对称性:

$$\text{若 } x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \text{ROC: } R$$

$$\text{则 } x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*) \quad \underline{\text{ROC为 } R}$$

推论: 当 $x(t)$ 为实信号时,

$$x(t) = x^*(t)$$

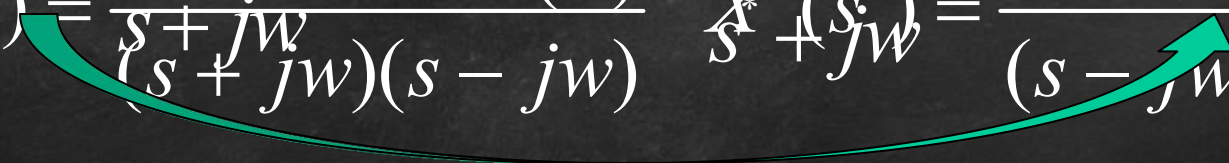
$$\therefore X(s) = X^*(s^*)$$

由此可得以下结论：

如果 $x(t)$ 是实信号，且 $X(s)$ 在 s_0 有极点
(或零点)，则 $X(s)$ 一定在 s_0^* 也有极点或零点。

这表明：

实信号的拉氏变换其复数零、极点必共轭成对出现。

$$X(s) = \frac{1}{(s + j\omega)(s - j\omega)} \quad \frac{1}{X(s^*)} = \frac{1}{s^* + j\omega} = \frac{X^*(s^*)}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$


6、卷积性质： 用于分析LTI

若 $x_1(t) \xleftrightarrow{L} X_1(s)$ ROC为 R_1

$x_2(t) \xleftrightarrow{L} X_2(s)$ ROC为 R_2

则 $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$

ROC 包括 $R_1 \cap R_2$

例：

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

$$X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X_1(s)X_2(s) = 1$$

ROC为整个S平面

小结

- ➡ 1、线性 $ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s)$ 包括 $R_1 \cap R_2$
- ➡ 2、时移 $x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s)$ R
- ➡ 3、S域平移 $e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0)$ $R + \operatorname{Re}\{s_0\}$
- ➡ 4、时域尺度变换 $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$ aR
- ➡ 5、共轭对称性: $x^*(t) \xleftrightarrow{L} X^*(s^*)$ $X(s) = X^*(s^*)$ R
- ➡ 6、卷积性质: $x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$ 包括 $R_1 \cap R_2$

7、时域微分：

若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ ROC为 R

则 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)$

ROC包括 R , 有可能扩大 ($s=0$ 处的零极点有变化)

例： $u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s}, \operatorname{Re}\{s\} > 0$ $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 整个 S 平面

8、S域微分：

若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$ ROC为 R

则 $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$ ROC为 R

例：求 $x(t) = te^{-at}u(t)$ 的拉氏变换

解：由 $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$

得 $-te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s+a} \right) = -\frac{1}{(s+a)^2}$

所以 $te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{(s+a)^2} \quad \text{Re}\{s\} > -a$

一般式：

(当 $X(s)$ 有多重极点时有用)

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{\text{L}} \frac{1}{(s+a)^n}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > -a$$

例：求 $X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ **的反变换**

解：利用部分分式展开

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{(s+1)^2} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$$

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A(s+2) + B(s+1)(s+2) + C(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{(B+C)s^2 + (A+3B+2C)s + (2A+2B+C)}{(s+1)^2(s+2)}$$

例：求 $X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}$ $\text{Re}\{s\} > -1$ **的反变换**

解：

$$\begin{cases} B+C=2 \\ A+3B+2C=5 \\ 2A+2B+C=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=3 \end{cases} \quad X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

由于ROC在极点 $s=-1$ $s=-2$ **的右边，所以对应**
右边信号 $x(t) = (2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$

9、时域积分：

$$\text{若 } x(t) \xleftrightarrow{L} X(s) \quad \text{ROC: } R$$

$$\text{则 } \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$$

$$\text{ROC包括 } R \cap (\operatorname{Re}\{s\} > 0)$$

9、时域积分

证明: $\underline{x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau}$

$$\text{且 } u(t) \xleftrightarrow{L} 1/s \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

根据卷积性质 $u(t) * x(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$

ROC包括 $R \cap (\text{Re}\{s\} > 0)$

10、初值与终值定理

条件： $t < 0, x(t) = 0$ (因果信号) ,

且 $t=0$ 时, $x(t)$ 不包含冲激或高阶奇异函数。

初值定理： $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$

10、初值与终值定理

否则, $X(s) = \underbrace{X_0(s)}_{\text{整式}} + \underbrace{X_1(s)}_{\text{真分式}}$

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X_1(s)$$

原因：整式 $X_0(s)$ 的L反变换
为冲激及其导数（即高阶奇异
函数），在 0^+ 时刻值为零。

例：

$$X(s) = \frac{s-1}{s+1} = 1 + \frac{-2}{s+1}$$

所以

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{-2}{s+1} = -2$$

终值定理： $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

条件—— $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$ $\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ **存在**

要求 $X(s)$ **的极点必须位于**S**平面的左半平面，虚**
轴上仅在 $s=0$ **处有一阶极点。**

例： $X(s) = \frac{2s + 1}{s(s^2 + 1)}$ 求 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$

解：由于在虚轴上有共轭极点 $s = \pm j$
所以， $x(t)$ 的终值不存在。

$$X(s) = \frac{-s}{s^2 + 1} + \frac{2}{s^2 + 1} + \frac{1}{s}$$

$$X(s) \xrightarrow{L} (1 + 2\sin t - \cos t)u(t)$$

性质应用

求 $L\{u(at+b)\}$

解: $u(t) \xleftrightarrow{L} 1/s, \operatorname{Re}\{s\} > 0$

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right) \quad aR$$

$$u(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{s/a} = \frac{a}{|a| \cdot s}, \operatorname{Re}\{s/a\} > 0$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s) \\ R$$

$$\begin{aligned} L\{u(at+b)\} &= L\{u[a(t+b/a)]\} \\ &= e^{bs/a} \cdot a / (|a| \cdot s) \end{aligned}$$

$$a > 0, \operatorname{Re}\{s\} > 0; \quad a < 0, \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

小结

➤ 时域微分 $\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s)$ 包括 R

➤ S域微分 $-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}$ R

一般式 $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n} \quad \text{Re}\{s\} > -a$

➤ 时域积分: $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s} X(s)$ 包括 $R \cap (\text{Re}\{s\} > 0)$

➤ 初值与终值定理 $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$
(注意前提条件)

小结

P442

变换对	信号	变换	收敛域
1	$\delta(t)$	1	全部 s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\operatorname{Re}\{s\} < 0$
6	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
7	$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}\{s\} < -a$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\operatorname{Re}\{s\} < -a$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	全部 s
11	$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
12	$[\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
13	$[e^{-at} \cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
14	$[e^{-at} \sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
15	$u_n(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	s^n	全部 s
16	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ 次}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$

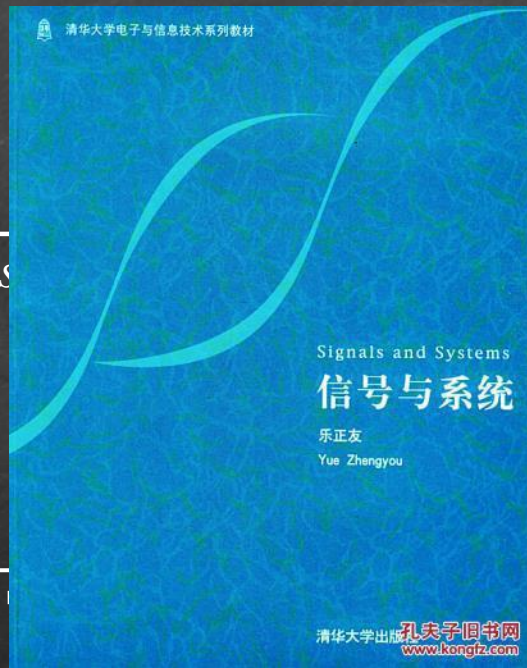
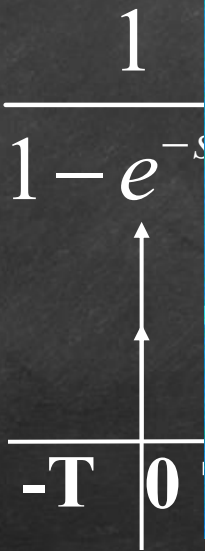
6.6 单边周期信号和单边抽样信号的拉氏变换

1. 单边周期冲激串的拉氏变换

$$L\{\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1 - e^{-Ts}}$$

$$\text{ROC: } \text{Re}\{s\} > 0$$

上式无零点。



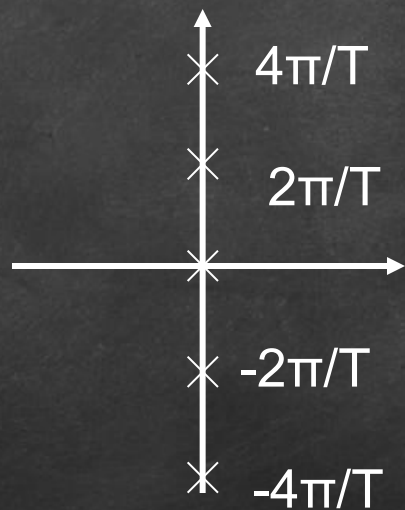
极点分析： 即 $e^{-sT} = 1$

$$e^{-\sigma T} \cdot e^{-j\omega T} = e^{-\sigma T} \cos \omega T - je^{-\sigma T} \sin \omega T = 1$$

$$\Rightarrow \sigma = 0 \quad \omega = 2\pi m / T = m\omega_0$$

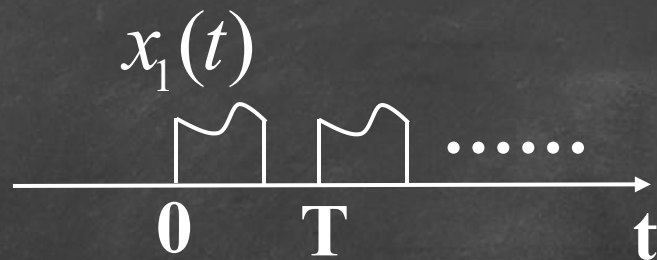
$$s = jm\omega_0$$

极点恰是周期信号各次谐波的频率点



2. 单边周期信号的拉氏变换

$$x(t) = x_1(t) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

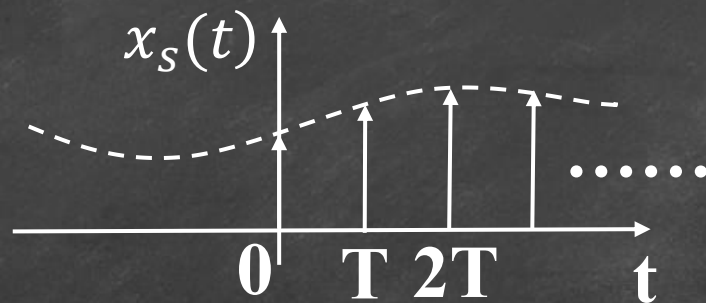
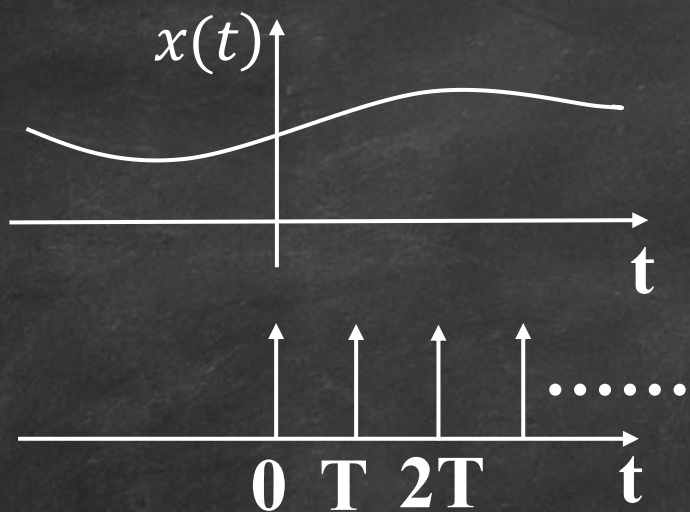


$x_1(t)$ 为第1个周期内的信号

$$\text{则 } X(s) = X_1(s) L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right\} = X_1(s) \frac{1}{1 - e^{-sT}}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > 0$$

3. 单边抽样信号的拉氏变换



$$x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$L\{x_s(t)\} = L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

例： $x_p(t)$ 为单边周期矩形信号

$$x_p(t) = (u(t) - u(t-1)) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot 2)$$

(1)求： $L\{x_p(t)\}$

解： $x_1(t) = u(t) - u(t-1)$ $X_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$

$$\begin{aligned} X_p(s) &= X_1(s) \frac{1}{1 - e^{-2s}} \\ &= \frac{1}{s}(1 - e^{-s}) \frac{1}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-s})} \quad \text{Re}\{s\} > 0 \end{aligned}$$

极点分析:

a. $X_1(s) = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$ 无极点, $s = 0$ 零极点抵消

b. $\frac{1}{1 - e^{-2s}} = \frac{1}{(1 - e^{-s})(1 + e^{-s})}$ 原有极点 $s = jk\pi$

但由于分母中的 $1 - e^{-s}$ 项被 $X_1(s)$ 中的相同项所抵消,
故 k 取偶数时不是极点; 同时 $s = 0$ 成为极点。

极点分析:

$$X_p(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})}$$

亦可由表达式直接分析, 令分母得0:

$$s = 0 \text{ 或 } 1 + e^{-s} = 0$$

$$e^{-\sigma} \cos \omega - j e^{-\sigma} \sin \omega = -1 \Rightarrow s = j(2m+1)\pi$$

(2)若 $x(t) = e^{-3t} x_p(t)$, 求 $L\{x(t)\}$

解:
$$X(s) = X_p(s+3) = \frac{1}{(s+3)(1+e^{-(s+3)})}$$

$$\operatorname{Re}\{s\} > -3$$

极点:

$$s = -3 \quad s = -3 + j(2m+1)\pi$$

(3)若 $x_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot 2)$, 求 $L\{x(t)\}$

解:
$$L\{x(t)\} = L\{e^{-3t} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - 2k)\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-3 \cdot 2k} e^{-2ks} = \frac{1}{1 - e^{-2(s+3)}}$$

极点: $s = -3 + jm\pi \quad \text{Re}\{s\} > -3$

反变换整理:

1、有理型真分式，直接部分分式展开；

注意共轭极点的处理；

2、有理型分子阶次 $>$ 分母，化为整式+真分式，同1；

3、非有理型——分母变化，对应单边周期型；

4、非有理型——性质的应用

小结

➤ 单边周期冲激串的拉氏变换

$$L\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

➤ 单边周期信号的拉氏变换 $x(t) = x_1(t) * \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$

➤ 单边抽样信号的拉氏变换 $x_s(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$

6.7 用L变换分析与表征LTI系统

LTI系统的单位冲激响应的拉普拉斯变换称为
系统函数/转移函数。

由卷积性质得：对LTI系统，

➤ $y(t) = x(t) * h(t) \quad Y(s) = X(s) \underline{H(s)}$

➤ $s = j\omega$ 时 $H(s)$ 变为频率响应 $H(j\omega)$ 。上式变为
$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

6.7.1 因果性

因果的LTI系统应满足： $t < 0$ 时， $h(t) = 0$

右边信号 $\rightarrow$ $H(s)$ 的ROC为右半平面

结论1：因果系统系统函数的ROC是某个右半平面。

✂ 反推不成立，除非系统函数是有理的。

结论2：若系统函数是有理的，系统的因果性等效于
ROC为最右边极点的右边的右半平面。

例: (1) $h(t) = \underline{e^{-t}u(t)}$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \quad \text{因果}$$

(2) $h(t) = \underline{e^{-|t|}}$

$$H(s) = \frac{-2}{s^2 - 1}, -1 < \operatorname{Re}\{s\} < 1 \quad \text{非因果}$$

(3) $h(t) = \underline{e^{-(t+1)}u(t+1)}$

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \quad \text{非因果}$$

推广——

反因果系统： $t > 0$ 时, $h(t) = 0$,

系统函数的ROC为某个左半平面。

✕ 反推不成立，除非系统函数是有理的。

6.7.2 稳定性

如果系统稳定，则有 $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$ 。因此 $H(j\omega)$ 必存在。意味着 $H(s)$ 的ROC必然包括 $j\omega$ 轴。

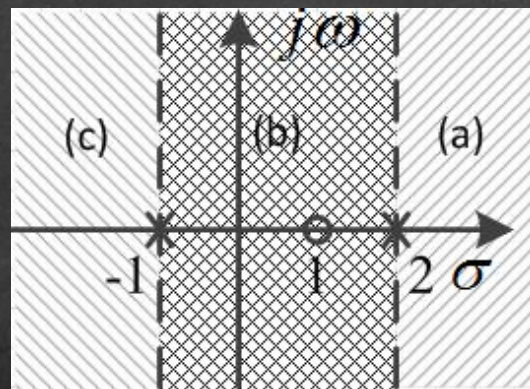
结论1： 当且仅当系统函数的ROC包括 $j\omega$ 轴时，一个LTI系统是稳定的。

6.7.2 稳定性

例：已知LTI系统的系统函数为 $H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$

对以下各种情况，求其ROC及 $h(t)$

- (1) 系统为因果的；
- (2) 系统是稳定的；
- (3) ROC如图 (c) 。



系统的零极点图

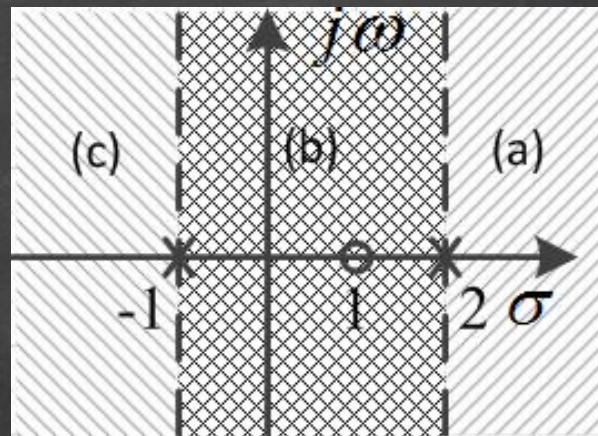
解：

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

$$A = (s+1)H(s)|_{s=-1} = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}$$

$$B = (s-2)H(s)|_{s=2} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$H(s) = \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}$$



系统的零极点图

解: $H(s) = \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}$

(1) 有理 $H(s)$ 、因果性, 故ROC为右半平面:

$\text{Re}\{s\} > 2$, 所以 $h(t) = (2/3 e^{-t} + 1/3 e^{2t})u(t)$

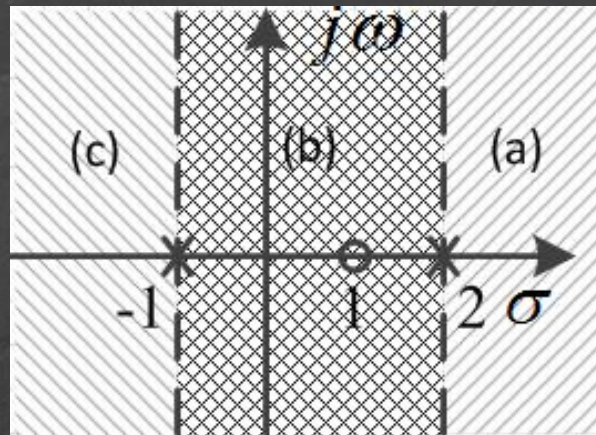
由于ROC不包括jw轴, 所以非稳定

(2) 系统是稳定的, 故ROC包括jw轴: $-1 < \text{Re}\{s\} < 2$, 这是非因果的

$$h(t) = 2/3 e^{-t}u(t) - 1/3 e^{2t}u(-t)$$

解：

$$H(s) = \frac{2/3}{s+1} + \frac{1/3}{s-2}$$



系统的零极点图

**(3) 对于(c)所示的ROC, 即 $\text{Re}\{s\} < -1$, 对应反因果系统
反因果、不稳定**

$$h(t) = -2/3 e^{-t} u(-t) - 1/3 e^{2t} u(-t)$$

- 有理系统函数 $H(s)$ ，因果性等效于ROC位于最右边极点的右边；
- 系统稳定，等效于ROC包括 $j\omega$ 轴；

结论2：当且仅当 $H(s)$ 的全部极点都位于 s 平面的左半平面时，也即全部极点都有负实部时，一个具有有理系统函数 $H(s)$ 的因果系统才是稳定的。

小结

- 对于LTI, $y(t) = x(t) * h(t)$ $Y(s) = X(s)H(s)$
- 因果系统 $H(s)$ 的ROC是某个右半平面（反之不成立）；
- 若 $H(s)$ 有理，因果性等效于ROC为最右边极点的右边；
- 当且仅当 $H(s)$ 的ROC包括 $j\omega$ 轴时，LTI系统是稳定的；
- 当且仅当 $H(s)$ 的全部极点都位于 s 平面的左半平面时，一个具有有理系统函数 $H(s)$ 的因果系统才是稳定的。

6.7.3 由线性常系数微分方程表征的LTI系统

➤ 拉氏变换，可求解微分方程，直接得 $H(s)$

例：LTI系统输入与输出满足以下线性常系数微分方程，

求 $h(t)$?
$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

解：由拉氏变换性质 $sY(s) + 3Y(s) = X(s)$

$$H(s) = Y(s) / X(s) = 1 / (s + 3)$$

系统是因果的, $\text{Re}\{s\} > -3$, $h(t) = e^{-3t}u(t)$

若反因果系统, $\text{Re}\{s\} < -3$, $h(t) = -e^{-3t}u(-t)$

- 性质不同, 系统函数表示式相同, 收敛域不同, 对应的单位冲击响应不同。

一般形式:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$
$$\xleftrightarrow{L} (\sum_{k=0}^N a_k s^k) Y(s) = (\sum_{k=0}^M b_k s^k) X(s)$$
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

- 零点是 $\sum_{k=0}^M b_k s^k = 0$ 的解，极点是 $\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0$ 的解；
- $H(s)$ 表示式+系统稳定性/因果性的附加条件，可得 $h(t)$ ；
- 若进一步，给出 $x(t)$ ，可求零状态响应。

6.7.4系统特性与系统函数的关系举例

例：已知LTI系统，当输入为 $x(t) = e^{-3t}u(t)$ 时，
零状态响应 $y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$

求：系统函数并判断系统的因果性和稳定性

解： $X(s) = 1 / (s + 3)$, $\text{Re}\{s\} > -3$

$$Y(s) = 1 / ((s + 1)(s + 2)), \text{Re}\{s\} > -1$$

$$\therefore H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s + 3}{(s + 1)(s + 2)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

ROC可能有三种情况:

$$\operatorname{Re}\{s\} < -2; -2 < \operatorname{Re}\{s\} < -1; \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

由卷积性质, $Y(s)$ 的ROC包括 $X(s)$ 和 $H(s)$ 收敛域的交集,
所以 $H(s)$ 的ROC必为: $\operatorname{Re}\{s\} > -1$, 所以系统是因果的;
因 $H(s)$ 的两个极点均有负实部, 故系统是稳定的。

$$Y(s)(s^2 + 3s + 2) = X(s)(s + 3)$$

可得微分方程:
$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 3x(t)$$

例：已知LTI系统满足

(1)系统是因果的; ROC为右半平面 $H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)}$

(2)系统是有理的, 且仅有两个极点: $s = -2, s = 4$

(3)若 $x(t) = 1$, 则 $y(t) = 0$; $y(t) = H(s)e^{-st}|_{s=0}$ $H(0) = 0$

(4) $t = 0^+$ 时, $h(t) = 4$ 初值定理 $p(s) = sq(s)$

试确定 $H(s)$, 分析稳定性

解：由1, 2有理 $H(s)$ 的因果系统，且有实部为+的极点，所以为不稳定系统。

设 $H(s) = \frac{p(s)}{(s+2)(s-4)}$, $p(s)$ 是 s 的多项式

由3, $x(t) = 1 = e^{0 \cdot t}$ 时, $y(t) = H(0)e^{0 \cdot t} = 0 \quad \therefore H(0) = 0$

即 $p(0) = 0 \therefore p(s)$ 有一根在 $s=0$,

所以可设 $p(s) = sq(s)$

由条件4, 根据初值定理,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 q(s)}{(s+2)(s-4)} = 4$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^2 q(s)}{s^2 - 2s - 8} = 4 \quad q(s) \text{ 必为常数} = 4$$

$$\therefore H(s) = \frac{4s}{(s+2)(s-4)}$$

例：一稳定的因果系统 $h(t) \xleftrightarrow{L} H(s)$ ， $H(s)$ 是有理的，
有一个极点位于 $s = -2$ ，原点没有零点，其余的零极点
不知，试判断 (a) ~ (g) 的对错，或不确定。

解：(a) $F\{h(t)e^{3t}\}$ 收敛； (错误)

$F\{h(t)e^{3t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-(3-j\omega)t} dt$ ，相当于 $H(s)$ 在
 $\text{Re}\{s\} = -3$ 时的值。 $H(s)$ 有极点 $s = -2$ ，且因果，故
ROC 至少应位于 -2 的右边，所以 -3 不在 ROC 内。

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 0$ (错误)

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-0 \cdot t} dt = H(s) \big|_{s=0}$$

由于原点无零点, $\therefore \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 0$ 错误。

(c) $th(t)$ 是一稳定因果系统的单位冲击响应; (正确)

由s域微分性质: $th(t) \xleftrightarrow{s} -\frac{dH(s)}{ds}, ROC = R.$

即两者有相同的收敛域, 所以系统也是因果稳定的。

(d) $dh(t) / dt$ 的拉式变换至少有一个极点; (正确)

$$\frac{dh(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sH(s) \text{ 无法消除位于}-2\text{的极点}$$

(e) $h(t)$ 是有限持续期的; (错误)

由稳定性得 $h(t)$ 绝对可积, 若 $h(t)$ 还是有限持续期的, 则ROC为整个S平面, 但已有 $s=-2$ 的极点, 所以错误。

(f) $H(s) = H(-s)$ (错误)

若有 $H(s) = H(-s)$, 则 $H(s)$ 在 $S=2$ 也应有一极点,
但对稳定的因果系统, 所有极点都有负实部, 所以错误。

(g) $\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 2$ (无法确定)

只有当分子与分母同阶时, 才可能有上式
但没有足够的条件, 所以无法确定

小结

- 用拉式变换可直接求解线性常系数微分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^{k^k} y(t)}{dt^{k^k}} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^{k^k}}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

- 解不包含ROC, 若配合因果或稳定, 则可求h(t)
- 若给出x(t), 可求零状态响应

6.8 系统函数的代数属性与方框图表示

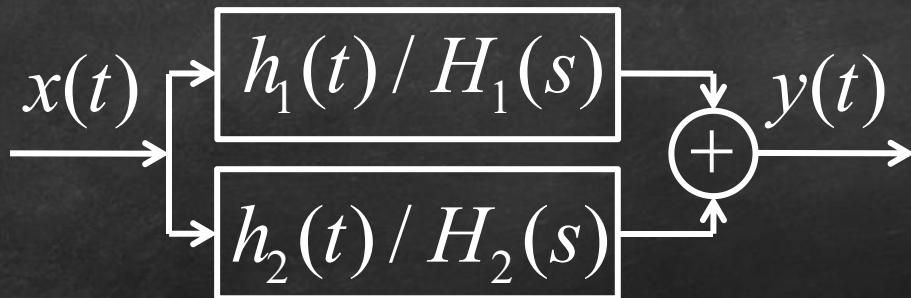
利用拉氏变换，时域的微分、卷积、时移→复频域的代数运算，也可用于LTI系统的互联中。

6.8.1 LTI系统互联的系统函数

1、并联

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

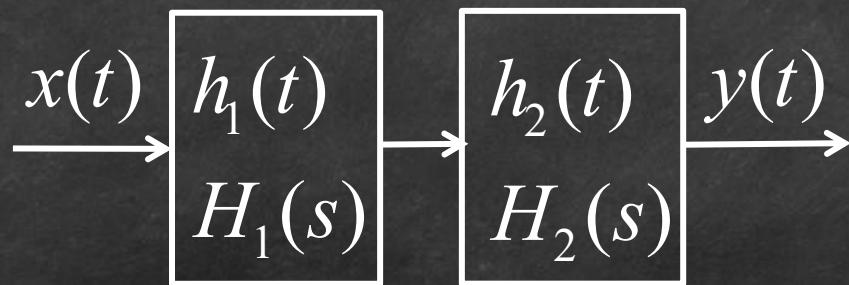
$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$



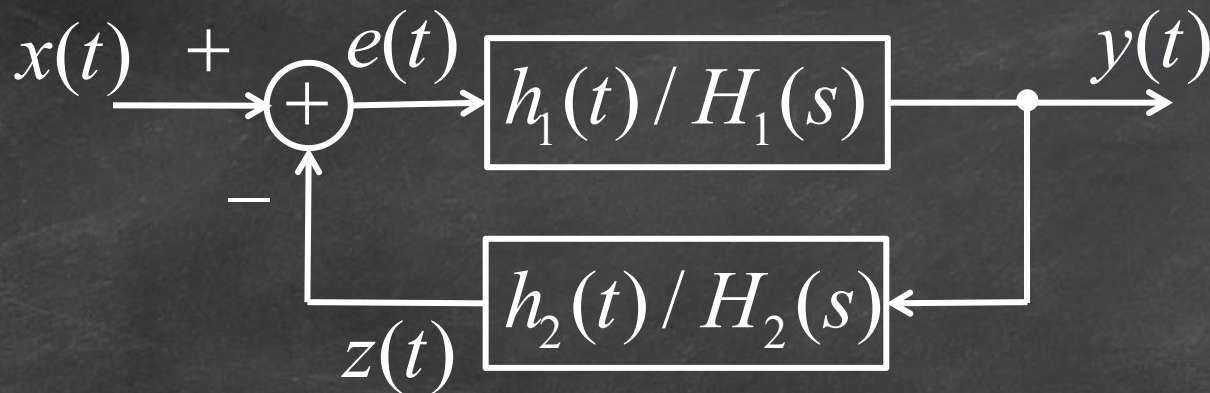
2、级联(串联)

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)$$



3、反馈



$$\begin{cases} Y(s) = H_1(s)E(s) \\ E(s) = X(s) - Z(s) = X(s) - H_2(s)Y(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

6.8.2 由微分方程和有理系统函数描述的因果LTI系统的方框图表示

➤ 微分 — s ; 积分 — $1/s$

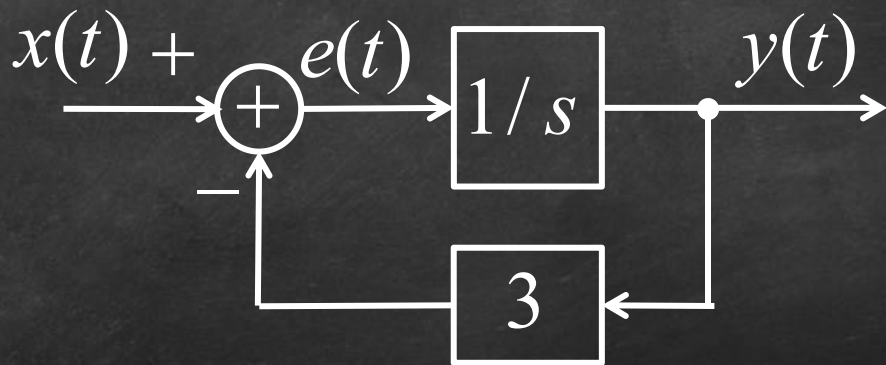
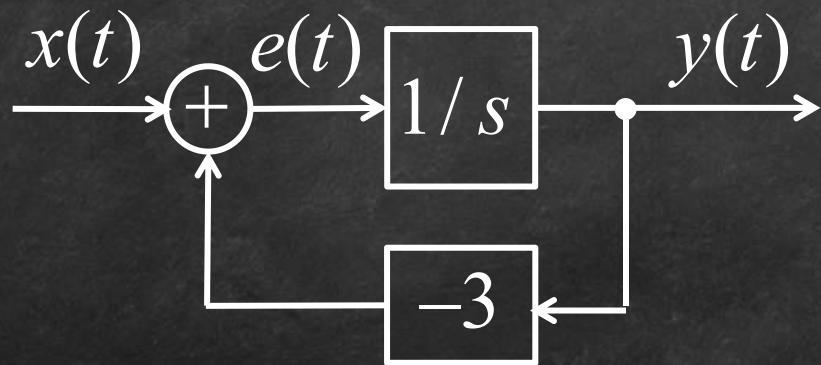
例1：一因果LTI系统的系统函数 $H(s) = 1/(s+3)$,
试画出其方框图

解： $H(s) = Y(s)/X(s) = 1/(s+3)$
 $sY(s) + 3Y(s) = X(s)$

系统对应的微分方程为 $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$

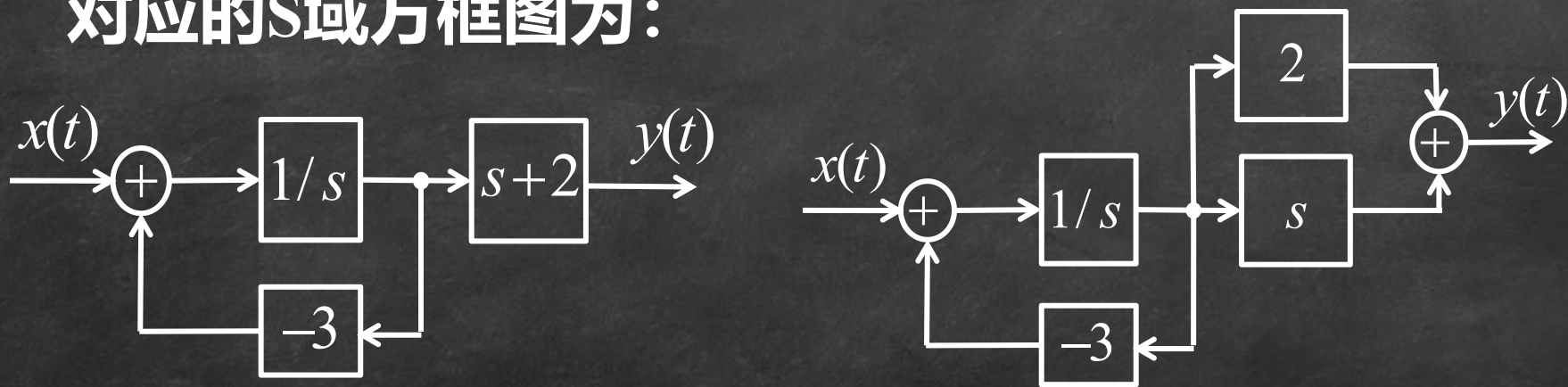
$$y(t) = \int (x(t) - 3y(t))dt$$

对应的S域方框图为: $H(s) = \frac{1/s}{1 + 3/s} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$

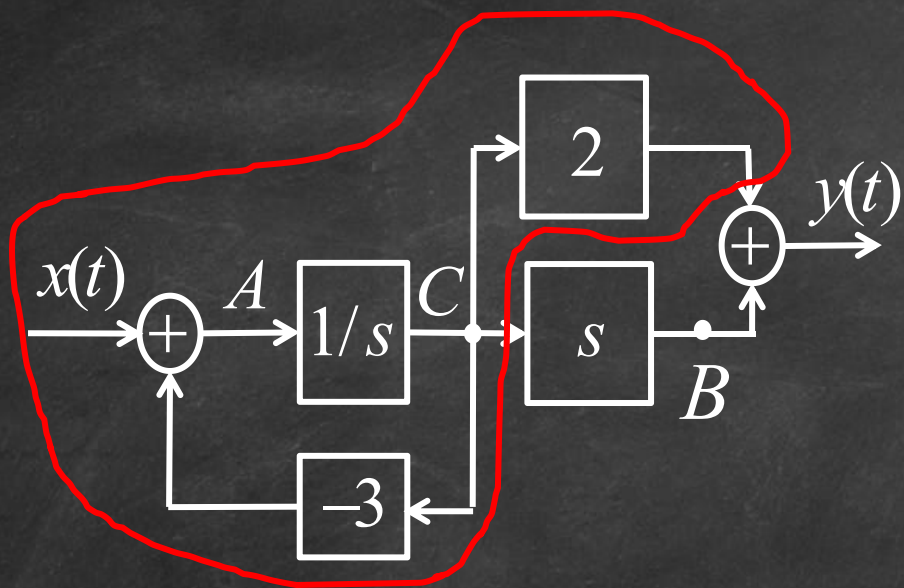


例2:
$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} = \frac{1}{s+3} \cdot (s+2)$$

对应的S域方框图为:

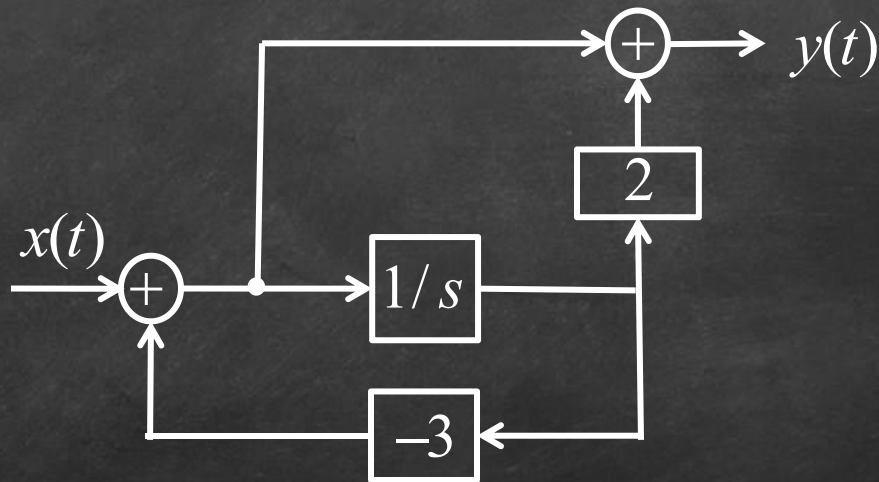


“S”--涉及微分运算, 不好



从A至C至B：先积分，再微分，故 $A=B$

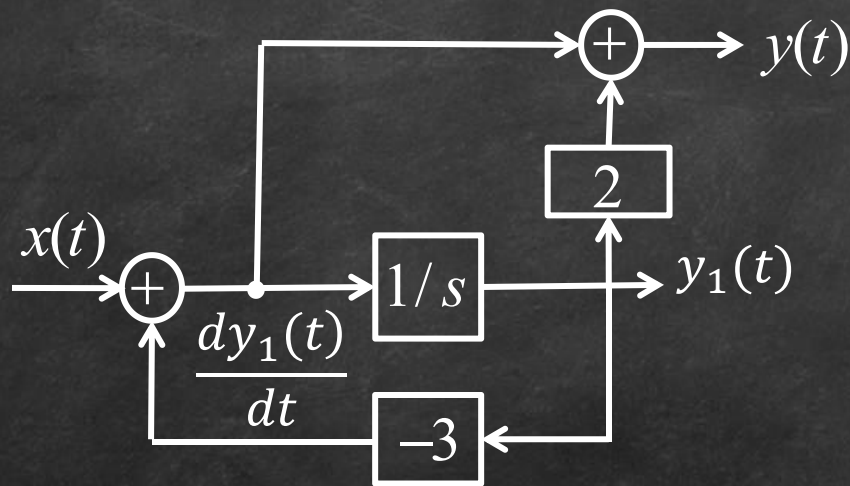
所以图可化为：（抽头）



➤ 不含微分运算(S)，好

$$H(s) = \frac{1}{s+3} (s+2)$$

“抽头”



$$H(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \frac{Y(s)}{Y_1(s)}$$

$$\underline{sY_1(s) + 3Y_1(s) = X(s)}$$

$$\underline{\frac{dy_1(t)}{dt} + 3y_1(t) = x(t)}$$

$$\underline{sY_1(s) + 2Y_1(s) = Y(s)}$$

$$\underline{\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = y(t)}$$

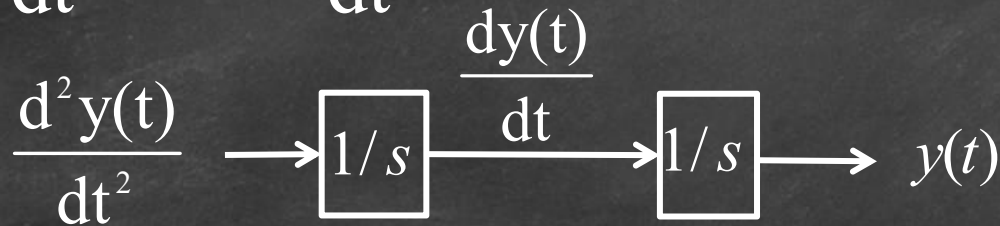
例3：因果二阶系统 $H(S) = \frac{1}{(S+1)(S+2)} = \frac{1}{S^2 + 3S + 2}$
画框图。

解：（1）直接型：框图中的系数可直接根据系统函数中的系数或微分方程中的系数确认

由 $H(S)$ 可得微分方程： $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

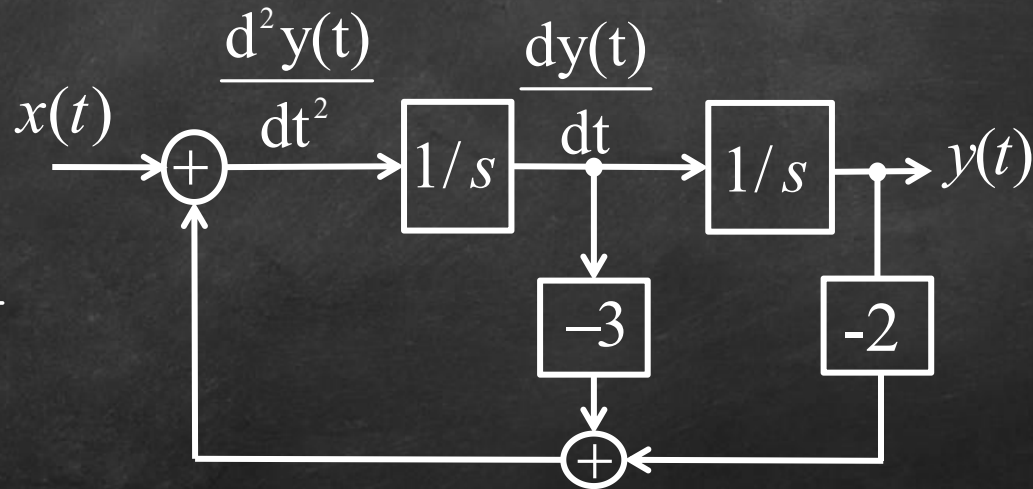
框图中尽量避免微分运算，而采用积分运算

解: $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$



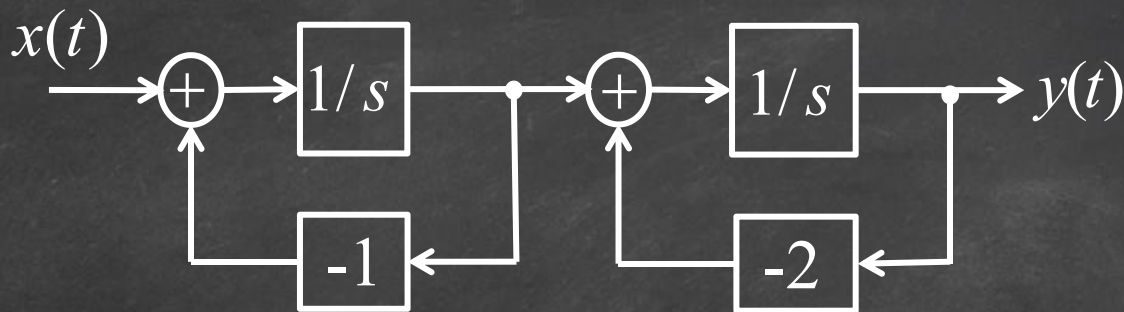
原式化为: (直接型)

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - 2y(t) - 3 \frac{dy(t)}{dt}$$



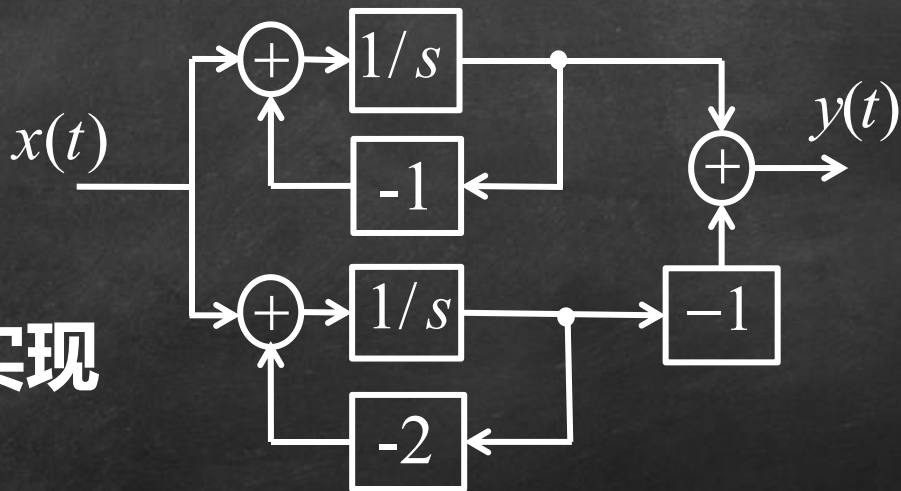
(2) 级联型:

$$H(S) = \frac{1}{S+1} \cdot \frac{1}{S+2}$$



(3) 并联型:

$$H(S) = \frac{1}{S+1} + \frac{-1}{S+2}$$



**同一 $H(S)$, 可以有多种实现
方式, 对应不同的框图**

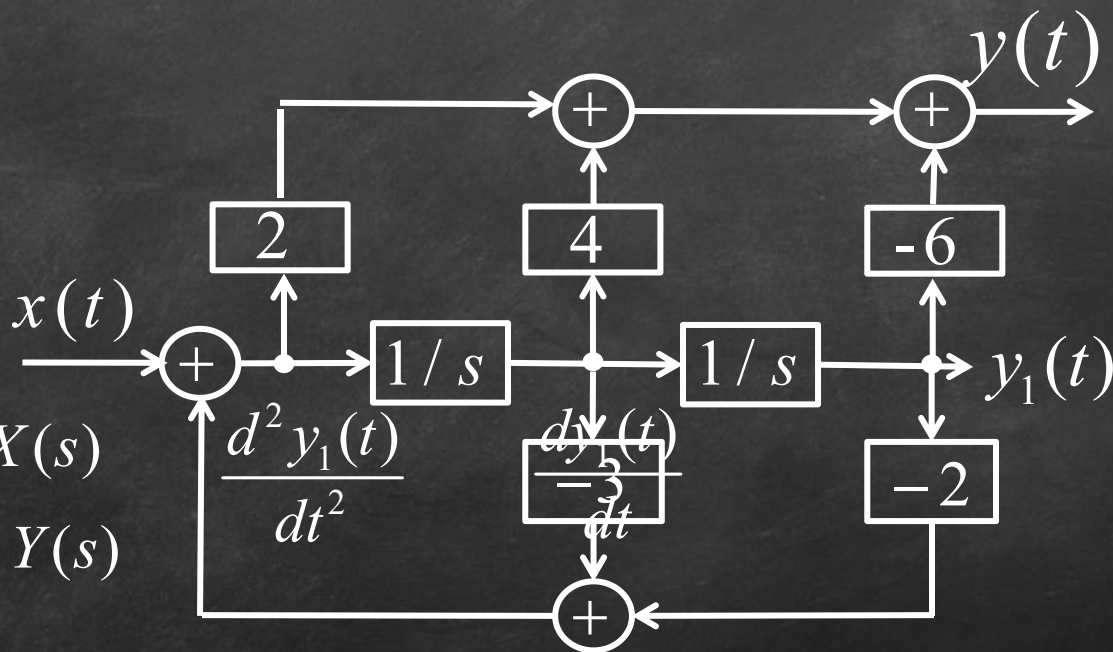
例4: $H(S) = \frac{2S^2 + 4S - 6}{S^2 + 3S + 2} = \left(\frac{1}{S^2 + 3S + 2} \right) (2S^2 + 4S - 6)$

(1) 直接型

$$H(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} \frac{Y(s)}{Y_1(s)}$$

$$s^2 Y_1(s) + 3s Y_1(s) + 2Y_1(s) = X(s)$$

$$2s^2 Y_1(s) + 4s Y_1(s) - 6Y_1(s) = Y(s)$$



例4: $H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2}$

(2) 级联型

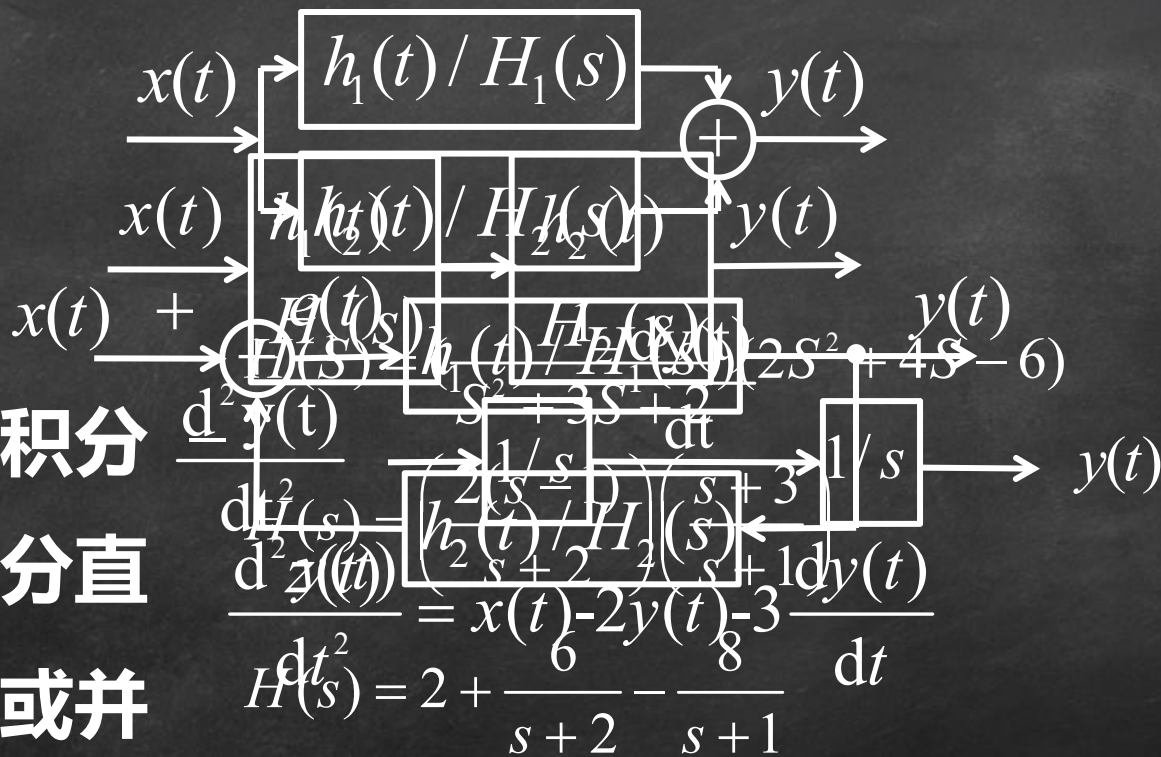
$$H(s) = \frac{2s^2 + 4s - 6}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2(s-1)}{s+2} \times \frac{s+3}{s+1} = H_1(s)H_2(s)$$

(3) 并联型

$$H(s) = 2 + \frac{6}{s+2} - \frac{8}{s+1}$$

小结

- 加和, 并联
- 乘积, 级联
- 分式, 反馈
- 微分方程, 化积分
- 复杂系统, 微分直接型、拆开串或并



6.9 单边拉普拉斯变换

➤ 应用：非零初始条件下，由线性常系数微分方程所描述的因果系统的求解。

定义： $\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mu L} \mathcal{X}(s) = \mu L\{x(t)\}$$

✓ 积分下限为 0^- ，表明在积分区间内包括了集中于 $t = 0$ 的冲激或高阶奇异函数

6.9 单边拉普拉斯变换

单边:

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

双边:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

- ✓ $t < 0$ 时为零的信号(因果信号), 双边和单边拉氏变换相等;
- ✓ 单边拉氏变换的ROC一定是某右半平面

6.9.1 单边拉普拉斯变换举例

例1: $x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$ 求 $\mathcal{X}(s)$

解: 因为 $t < 0$ 时, $x(t) = 0$, 所以 $\mathcal{X}(s) = X(s)$

$$\mathcal{X}(s) = \frac{1}{(s+a)^n} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

例2: $x(t) = e^{-a(t+1)}u(t+1)$, 求 $\mathcal{X}(s)$

解:

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)}u(t+1)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a}e^{-t(s+a)}dt$$

$$= e^{-a} \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$X(s) = e^s \frac{1}{s+a} \neq \mathcal{X}(s) \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

例3: $x(t) = u_0(t) + 2u_1(t) + e^t u(t)$,求 $\mathcal{X}(s)$

解:

$t < 0$ 时, $x(t) = 0$, 所以 $\mathcal{X}(s) = X(s)$

$$X(s) = 1 + 2s + \frac{1}{s-1} \quad \text{Re}\{s\} > 1$$

例4: $\mathcal{X}(s) = \frac{s^2 - 3}{s + 2}$ 求 $x(t)$

解: $\mathcal{X}(s) = A + Bs + \frac{C}{s + 2} = \frac{A(s + 2) + Bs(s + 2) + C}{s + 2}$

$$\frac{s^2 - 3}{s + 2} = \frac{Bs^2 + (A + 2B)s + (2A + C)}{s + 2} = -2 + s + \frac{1}{s + 2}$$

因为ROC一定为右半平面，所以ROC为： $\text{Re}\{s\} > -2$

所以 $x(t) = -2\delta(t) + u_1(t) + e^{-2t}u(t) \quad t > 0^-$

✓ 单边拉普拉斯反变换仅能得到 $t > 0$ 时的信号表达式

6.9.2单边拉普拉斯变换的性质

书: P458

1、时域微分-与双边变换明显不同

$$L: \frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{L} sX(s) \quad \mu L: \frac{d}{dt} x(t) \xleftrightarrow{\mu L} s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$$

证明: $\int u' v dx = \int (uv)' dx - \int uv' dx$

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} x'(t) e^{-st} dt &= x(t) e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= s\mathcal{X}(s) - x(0^-) \end{aligned}$$

6.9.2单边拉普拉斯变换的性质

1、时域微分-与双边变换明显不同

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mu L} s\mathcal{X}(s) - x(0^-) \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) \xleftrightarrow{\mu L} s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

证明： $\int u'v dx = \int (uv)' dx - \int uv' dx$

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{\infty} x''(t)e^{-st} dt &= x'(t)e^{-st} \Big|_{0^-}^{\infty} + s \int_{0^-}^{\infty} x'(t)e^{-st} dt \\ &= s^2 \mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \end{aligned}$$

6.9.2单边拉普拉斯变换的性质

2、卷积性质：

单边变换增加的条件: 若 $t < 0$ 时, $x_1(t) = x_2(t) = 0$

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$$

对因果LTI, 输入满足 $t < 0$ 时为0

- 系统分析
- 代数属性方框图

6.9.3利用单边拉普拉斯变换求解微分方程

➤重要应用：非零起始条件的线性常系数微分方程

例：下列微分方程描述的因果LTI系统

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(1) 求系统函数 $s^2 Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = X(s)$

解：依题，系统函数为 $H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

(2) 当 $x(t) = \alpha u(t)$ 时, 求零状态响应

解:

$$\mathcal{X}(s) = X(s) = \alpha / s$$

$$Y(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} = \frac{\alpha/2}{s} - \frac{\alpha}{s+1} + \frac{\alpha/2}{s+2}$$

$$y(t) = \alpha \left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \right) u(t)$$

(3) 初始条件为: $y(0^-) = \beta, y'(0^-) = \gamma$, 试求系统零输入响应和零状态响应 .

$$\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{\mu L} s\mathcal{X}(s) - x(0^-) \quad \frac{d^2}{dt^2}x(t) \xleftrightarrow{\mu L} s^2\mathcal{X}(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2 y(t) = x(t)$$

解: 由微分方程求单边拉氏变换得

$$s^2 \mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma + 3s \mathcal{Y}(s) - 3\beta + 2 \mathcal{Y}(s) = \alpha / s$$

(3) 初始条件为: $y(0^-) = \beta, y'(0^-) = \gamma$, 试求系统零输入响应和零状态响应.

解:

$$s^2 \mathcal{Y}(s) - \beta s - \gamma + 3s \mathcal{Y}(s) - 3\beta + 2 \mathcal{Y}(s) = \alpha / s$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)} + \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}$$

前两项的反变换, 为输入为0时的响应-零输入响应

后一项的反变换, 为初始状态为0的响应-零状态响应

小结

- 定义: $\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$ 与双边的关系, ROC右边;
- 单边拉氏反变换仅能得到 $t > 0$ 时的信号表达式;
- 性质: 注意时域微分、卷积;
- 应用: 非零初始条件下, 由线性常系数微分方程所描述的因果系统的求解;

全响应 (μL) = 零输入响应 ($\psi(0^-)$) + 零状态响应 (L)